- حل العلاقات العودية :

١- طريقة التكرار :

مراحل حل العلاقة العودية بطريقة التكرار :

١- التكرار عدة مرات حتى تتضح صيغة التكرار i

٢- كتابة الصيغة بدلالة n وعدد التكرارات i

٣- اختيار i بحيث أن $T(n)$ تعبر عن مجموع حدود تعتمد على n والشرط الابتدائي .

٤- حل المعادلة الناتجة .

مثال : أوجد حل العلاقة العودية التالية :

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(n-1) + 1 & n > 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad T(1) = 1$$

الحل :

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$= 2[2T(n-2) + 1] + 1 = 2^2 T(n-2) + 2 \times 1 + 1$$

$$= 2^2 [2T(n-3) + 1] + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1$$

$$= 2^3 T(n-3) + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1$$

من أجل خطوة i :

$$T(n) = 2^i T(n-i) + 4 + 2 + 1$$

من أجل الشرط الابتدائي $T(1) = 1$

$$n - i = 1 \Rightarrow i = n - 1$$

$$T(n) = 2^{n-1} \underbrace{T(1)}_{1} + \underbrace{2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1}_{\sum_{j=0}^{i-1} 2^j}$$

- شرح فقط :

$n=3 \Rightarrow 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 = 7$

$7 = 8 - 1 = 2^3 - 1$

$\sum_{j=0}^{3-1=2} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 7 \Rightarrow 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$

تكملة الحل :

$T(n) = 2^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = 2^{n-1} + 2^n - 1$

مثال :

اوجد حل العلاقة العودية التالية باستخدام طريقة التكرار.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3T(n-1) + 2 & n > 1 \end{cases}$$

الحل :

$T(n) = 3T(n-1) + 2 = 3[3T(n-2) + 2] + 2$

$= 3^2 T(n-2) + 3^1 \times 2 + 3^0 \times 2$

$= 3^2 [3T(n-3) + 2] + 3^1 \times 2 + 3^0 \times 2$

$= 3^3 T(n-3) + 3^2 \times 2 + 3^1 \times 2 + 3^0 \times 2$

من اجل الخطوة i :

$T(n) = 3^i T(n-i) + 2 \sum_{j=0}^{i-1} 3^j$

نعوض $n - i = 1 \Rightarrow i = n - 1$

$$T(n) = 3^{n-1} \underbrace{T(1)}_{1} + 2 \sum_{j=0}^{n-2} 3^{j}$$

شرح فقط.

$$2 \sum_{j=0}^{n-2} 3^{j} = 2 \sum_{j=0}^{3-2=1} 3^{j} = 2\times 3^{0} + 2\times 3^{0} + 2\times 3^{1} = 6+2 = 8$$

$$3^{n-1} - 1 = 3^{3-1} - 1 = 3^{2} - 1 = 9 - 1 = 8$$

تكملة الحل :

$$T(n) = 3^{n-1} + 3^{n-1} - 1 = 2\times 3^{n-1} - 1$$

تمرين :

اوجد حل العلاقة العودية التالية بطريقة التكرار .

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 6n - 1 & n>1 \end{cases}$$

الحل :

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 6n - 1 = 2\left[2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\right] + 6n - 1$$

$$= 2^{2} T\left(\frac{n}{2^{2}}\right) + (6n-2) + (6n-1)$$

$$= 2^{2}\left[2T\left(\frac{n}{2^{3}}\right) + 6\left(\frac{n}{2^{2}}\right) - 1\right] + (6n-2) + (6n-1)$$

$$T(n) = 2^{3} T\left(\frac{n}{2^{3}}\right) + (6n-4) + (6n-2) + (6n-1)$$

من أجل خطوة i .

$$T(n) = 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + (6n-4) + (6n-2) + (6n-1)$$

نفرض أن $n = 2^i$

$\Rightarrow \log n = i$

$\boxed{\log(2) = 1}$ حفظ.

نعوض:

$$T(n) = nT(1) + 6\underbrace{i}_{\text{مكررة } i \text{ مرة}} n - \sum_{j=0}^{i-1} 2^j =$$

$$= n + 6n\log n - \sum_{j=0}^{\log n - 1} 2^j$$

تسلسل

أي $(2^{\log n} - 1)$ حسب العلاقة التالية: $2 - 1$

$$T(n) = \cancel{n} + 6n\log n - (\cancel{n} - 1)$$

$$T(n) = 6n\log n + 1$$

ج- طريقة تغيير المتغير:

حل العلاقة العودية بطريقة تغيير المتغير:

من أجل حل العلاقة العودية بطريقة تغير المتغير ~~نتبع ما يلي~~:

١- نفرض أن $n = 2^k$

$\Rightarrow k = \log n$

نستبدل كل $T(n)$ بـ

$$T(n) = T(2^k)$$

ثم نضع أن $T(2^k)$ تساوي

$$T(n) = T(2^k) = t_k$$

ثم بعد ذلك نعوض ونعوض كل n بـ 2^k وكل T بـ t_k

$T(2^k) = T(n)$ ، $t_k = T(2^k)$

ثم نوجد الحل العام للمعادلة.

حيث T هنا تستخدم للإشارة إلى حد العلاقة العودية الأصلية.

اما t_k تشير إلى حدود العلاقة العودية الجديدة الناتجة عن تغيير المتغير.

- مثال: أوجد حل العلاقة العودية التالية بطريقة تغيير المتغير

$$T(n) = 4T(\tfrac{n}{2}) + n \qquad ; n > 1$$

الحل: حيث نفترض $n = 2^k \Leftarrow$

$$k = \log n$$

$$T(2^k) = 4T(2^k \cdot 2^{-1}) + 2^k = 4T(2^{k-1}) + 2^k$$

* نستبدل كل $T(2^k)$ بـ t_k (ثم نكتب هذه العبارة):

$$t_k = 4t_{k-1} + 2^k$$

فأصبحت لدينا علاقة عودية غير متجانسة تكتب بالشكل:

$$\underbrace{t_k - 4t_{k-1}}_{\text{معادلة المتجانسة}} = 2^k$$

حيث $d = 0$ ، $p(n) = 1$ ، $b = 2$

المعادلة المميزة لها:

$a_0 = 1$, $a_1 = -4$, $k = 1$, $b = 2$, $d = 0$

$$\underbrace{(x-4)}_{\text{معادلة مميزة من الجزء المتجانس}} \; \underbrace{(x-2)}_{\text{معادلة مميزة من الجزء غير المتجانس}} = 0 \qquad \text{معادلة المميزة}$$

اما $x = 2$ أو $x = 4$

~~الحل العام~~

الحل العام (٤)

$$t_k = c_1(4)^k + c_2(2)^k$$

$$T(2^k) = c_1 4^k + c_2 2^k$$

نستبدل كل $T(2^k)$ ب $T(n)$

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2 n \in O(n^2)$$

نضع اعلى اس موجود

الدلالة على تعقيد الخوارزمية.

حيث c مقدار ثابت.

تمرين :

اوجد حل المعادلة العودية التالية بطريقة تغيير المتغير.

$$T(n) = 4T(\tfrac{n}{2}) + n^2 \qquad n > 1$$

الحل :

نفرض $n = 2^k \Leftarrow k = \log n$

نضع بدل كل $T(n)$ ب $T(2^k)$ اي $T(n) = T(2^k)$

$$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 4^k$$

حفظ

$n = 2^k$

$n^2 = 4^k$

$$t_k = 4t_{k-1} + 4^k$$

معادلة عودية غير متجانسة

$$t_k - 4t_{k-1} = 4^k$$

$$(x-4)(x-4) = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 0$$

جذر مكرر مرتين $x = 4$

الحل العام $t_k = c_1(4)^k + c_2 k(4)^k$

نستبدل كل t_k بـ $T(2^k)$

$$T(2^k) = c_1 (4)^k + c_2 k (4)^k$$

نستبدل كل 2^k بـ n وكل k بـ $\log n$ وكل $T(2^k)$ بـ $T(n)$

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2 n^2 \log n \in O(n^2 \log n)$$

تمرين: اوجد حل العلاقة العودية بطريقة تغيير المتغير.

$$T(n) = 2T(\tfrac{n}{2}) \cancel{n\log n} + n\log n$$

الحل:

نفرض $n = 2^k \Leftarrow k = \log n$

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + k \cdot 2^k$$

$$t_k = 2t_{k-1} + \underbrace{k\,2^k}$$

اي جزء مكرر.

$$t_k - 2t_{k-1} = k\,2^k$$

المعادلة المميزة

$$(x-2)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^3 = 0$$

$x = 2$ جذر مكرر ثلاث مرات:

$$t_k = c_1 2^k + c_2 k 2^k + c_3 k^2 2^k$$

نستبدل كل 2^k بـ n وكل k بـ n وكل t_k بـ $T(2^k)$

$$T(2^k) = c_1 2^k + c_2 k 2^k + c_3 k^2 2^k$$

محاضرات الدفتر

القسم : السنة : المادة : المحاضرة :

نستبدل كل $T(2^k)$ بـ $T(n)$

$$T(n) = c_1 n + c_2 n \log n + c_3 n \log^2 n \in \Theta(n \log^2 n)$$

تمرين: أوجد حل العلاقة العودية بطريقة تغيير المتغير:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + cn$$ ؛ c ثابت

الحل:

$$T(2^k) = 3T(2^{k-1}) + c2^k$$

$$t_k = 3t_{k-1} + c_2 2^k$$

$$(x-3)(x-2) = 0$$

إما $x = 3$ أو $x = 2$

$$t_k = c_1 3^k + c_2 2^k$$

$$T(2^k) = c_1 3^k + c_2 2^k$$

$$T(n) = c_1 3^{\log n} + c_2 n = c_1 n^{\log 3} + c_2 n \in O(n^{\log 3})$$

ملاحظة مهم:

$$a^{\log b} = b^{\log a}$$

- تعقيد الخوارزمية:

في الواقع يمكن دراسة فعالية الخوارزمية من خلال تحديد حجم ذاكرة الحاسب زائد زمن تنفيذ الخوارزمية، حيث زمن التنفيذ هو عدد خطوات الحل لذلك تعقيد الخوارزمية تمثل مقدار الجهد الحسابي المبذول لحل مسألة على الحاسب باستخدام تلك الخوارزمية. وتعقيد الخوارزمية هو عبارة عن تابع أو دالة $f(n)$ يعطي حداً أعلى للعدد العمليات أو زمن

محاضرات الدفتر

القسم :		السنة :		المادة :		المحاضرة :

التنفيذ التي تقوم به الخوارزمية (صداعك بعلي اشارة متراجحة ≥) .

- لعقيد الخوارزمية أو تحليل الخوارزمية ودراسة فعاليتها تستخدم الرموز التالية .
O ، Ω ، Θ .

- الرمز O :

ليكن لدينا f, g تابعين معرفين على مجموعة الأعداد الصحيحة .

$$f, g : N \longrightarrow R^{+}$$

نقول أن

$f(n) \in O(g(n))$ إذا وجد عدد حقيقي موجب $c > 0$ وعدد صحيح موجب n_0 بحيث أن $n \geq n_0 \geq 0$

بحيث :
$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

إذا استطعنا إيجاد c (واحدة) و n_0 (واحدة) بحيث تتحقق هذه المتراجحة $f(n) \leq c \cdot g(n)$ عندئذ نقول :

$$f(n) = O(g(n))$$

- مثال : اثبت أن :

$$\underbrace{\frac{3n^4 - 2n}{5n - 1}}_{f} = O(\underbrace{n^3}_{g})$$

الحل :

لدينا :

$$\left| \frac{3n^4 - 2n}{5n - 1} \right| \leq \left| \frac{3n^4}{5n - 1} \right| \leq \left| \frac{3n^4}{5n - n} \right| =$$

$$= \frac{3n^4}{4n} = \frac{3}{4} n^3$$

أي : $c = \frac{3}{4}$ ، $n \geq 1$

$$\frac{3n^4 - 2n}{5n - 1} \leq c n^3$$

مثال : أثبت أن

$$T(n) = n^3 + 20n + 1 = O(n^3)$$

الحل

حسب تعريف O يجب أن $f(n) \leq O\, g(n)$

الـ

$$n^3 + 20n + 1 \leq c n^3$$

n عدد موجب ونقسم على n^3

$$1 + \frac{20}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq c$$

نفرض $n = 10$

$$c \geq 1{,}201$$

$$T(n) \in O(n^3)$$

انتهت المحاضرة